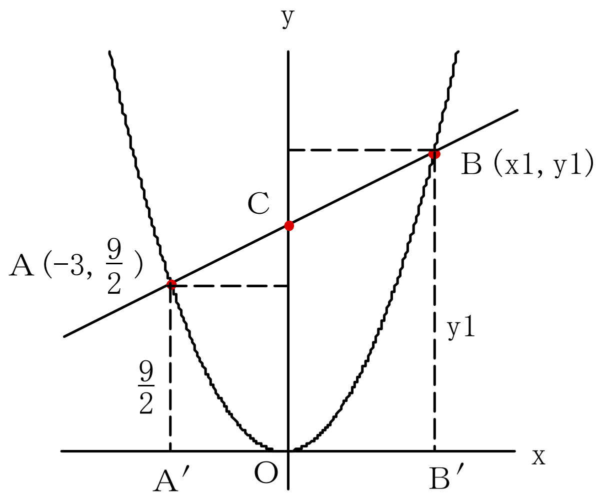
関数の応用（1）解答　　　　　　目次１へ　問題へ

１．（1）点 $A\left(-3,\dfrac{9}{2}\right)$ は $y=ax^2$ 上の点

だから

$\dfrac{9}{2}=a(-3)^2$ よって $a=\dfrac{1}{2}$



（2）（1）より $y=ax^2=\dfrac{1}{2}x^2$

また，AA´：BB´＝9：16＝$\dfrac{9}{2}$：y1　より $9y1=16\times\dfrac{9}{2}$

よって，y1＝8

これを $y1=\dfrac{1}{2}x1^2$ に代入して $8=\dfrac{1}{2}x1^2$ よって $x1^2=16 \rightarrow x1=\pm 4$

$x1>0$ 　より　$x1=4$

以上より，点Ｂの座標は $B(x1,y1)=B(4,8)$

２点Ａ，Ｂを通る直線の式 $y=px+q$ に点Ａ，Ｂの座標の値を代入して，

$$\begin{cases}-3p+q=\dfrac{9}{2}\\ 4p+q=8\end{cases}$$　これを解いて　$p=\dfrac{1}{2}$，$q=6$

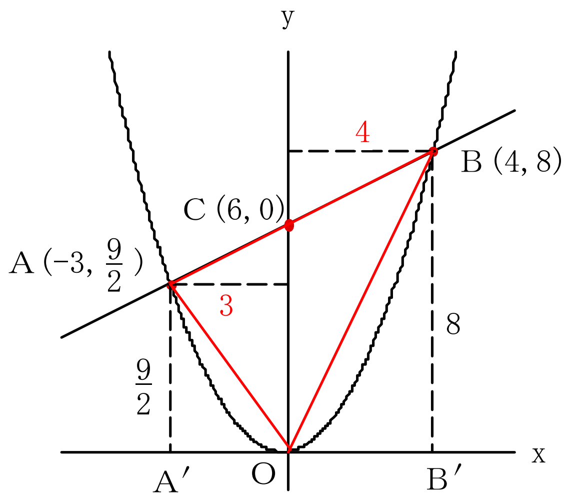
（3）（2）より直線ＡＢの式は $y=\dfrac{1}{2}x+6$

したがって，点Ｃの y座標は 6

$\Delta OAB=\Delta OAC+\Delta OBC$

$=\dfrac{1}{2}\times 6\times 3+\dfrac{1}{2}\times 6\times 4$

$=9+12=21$



２．　（１）　点Ｐは $y = x^2$ 上の点だから，

$$p(x, y) = p\left(x, x^2\right)$$

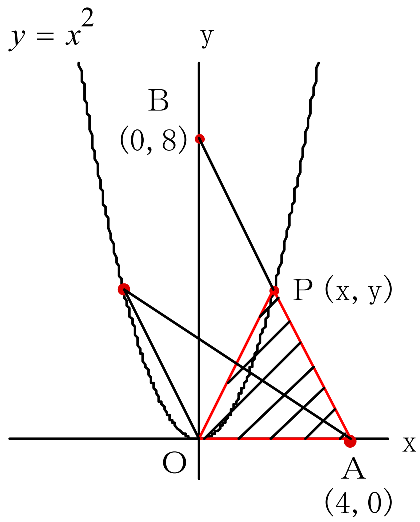
よって，

$$\Delta OAP = \frac{1}{2} \times OA \times x^2 = \frac{1}{2} \times 4 \times x^2 = 12$$

$$x^2 = 6 \qquad x = \pm\sqrt{6}$$

以上から，点Ｐの座標は

$$p\left(\sqrt{6}, 6\right) \qquad p\left(-\sqrt{6}, 6\right)$$



（２）

$$\Delta OAP = \frac{1}{2} \times OA \times y = \frac{1}{2} \times 4 \times x^2 = 2x^2$$

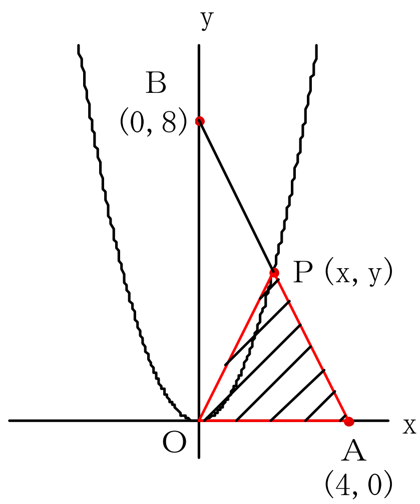
$$\Delta OBP = \frac{1}{2} \times OB \times x = \frac{1}{2} \times 8 \times x = 4x$$

$$2x^2 = 4x$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x(x-2) = 0$$

$x = 0$ ，2　　$x > 0$ だから　$x = 2$

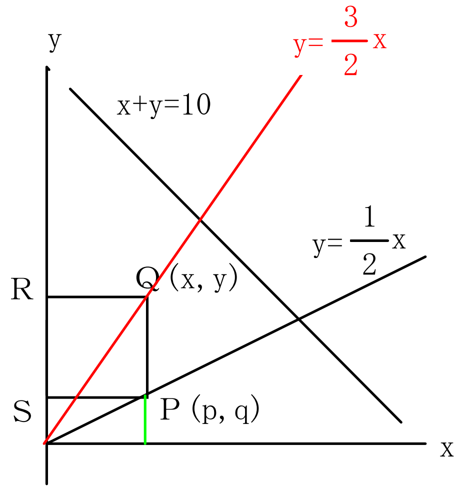


３．　（１）　点Ｐ，Ｑの座標をＰ(p, q)．Ｑ(x, y) とおく。

点Ｐは $y = \frac{1}{2}x$ 上の点だから

$$P(p, q) = P\left(p, \frac{1}{2}p\right)$$

すなわち $q = \frac{1}{2}p$



四角形ＰＱＲＳは正方形だから

ＰＳ＝ＰＱ＝p

点Ｑ(x, y)の座標値は

$$x = p$$

$$y = q + PQ = \frac{1}{2}p + p = \frac{3}{2}p = \frac{3}{2}x$$

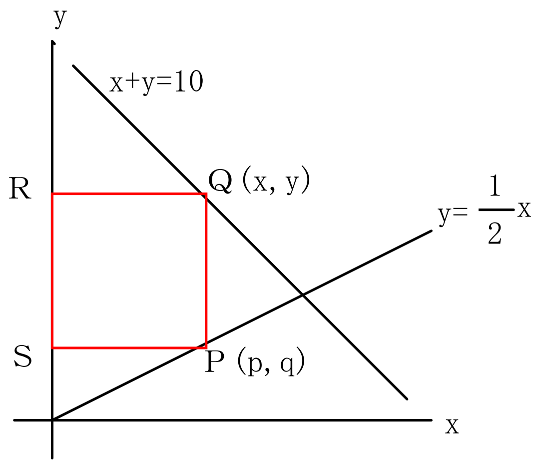
以上から点Ｑがえがく線の式は　$y = \frac{3}{2}x$

（２）

正方形の一辺の長さp の値を求める。

点Ｐは $y = \frac{1}{2}x$ 上の点だから

点Ｐ $(p, q) = P\left(p, \frac{1}{2}p\right)$



点Ｑは直線 $x + y = 10$ 上の点だから

点Ｑ $(x, y) = Q(p, 10 - p)$

ＰＳ＝ＰＱ より

$$p = y - q = 10 - p - \frac{1}{2}p = 10 - \frac{3}{2}p$$

すなわち，

$$p = 10 - \frac{3}{2}p$$

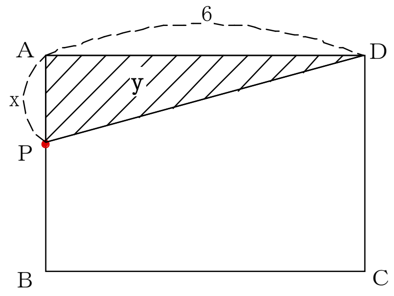
$$p + \frac{3}{2}p = 10$$

$$\frac{5}{2}p = 10 \qquad p = 10 \times \frac{2}{5} = 4 \qquad 4cm$$

4．（1）　① $0 \leqq x < 4$ のとき，

点Ｐは辺ＡＢ上にある。

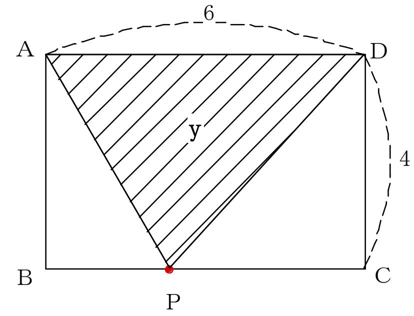
$$y = \frac{1}{2} \times 6 \times x = 3x$$



② $4 \leqq x < 10$ のとき，

点Ｐは辺ＢＣ上にある。

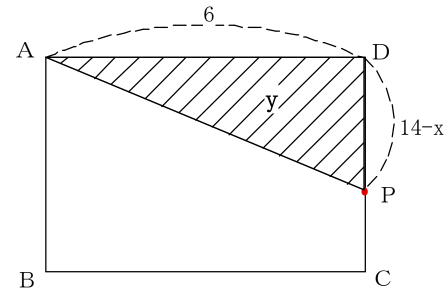
$$y = \frac{1}{2} \times 6 \times 4 = 12 \quad = 一定$$



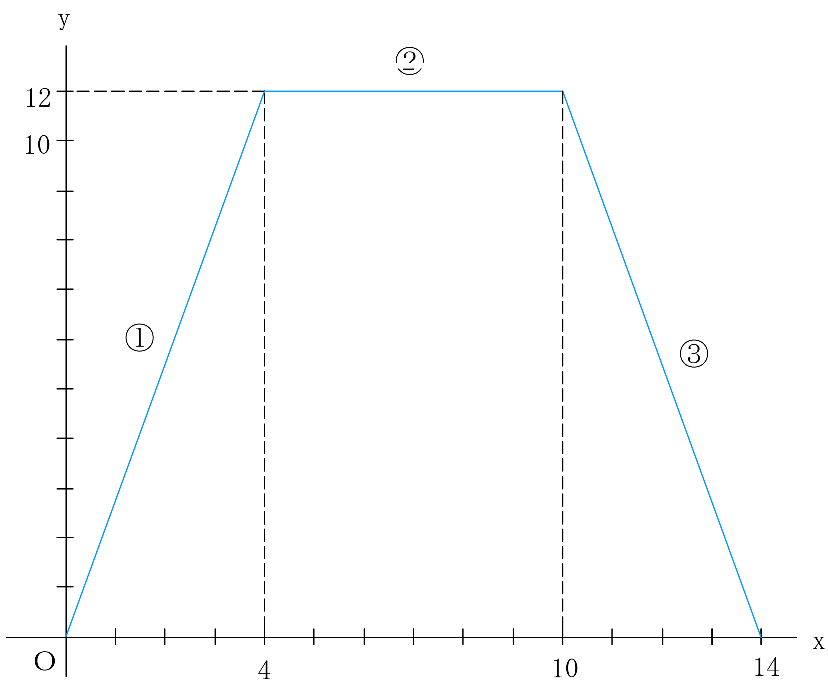
③ $10 \leqq x < 14$ のとき，

点Ｐは辺ＣＤ上にある。

$$y = \frac{1}{2} \times 6 \times (14 - x) = -3x + 42$$

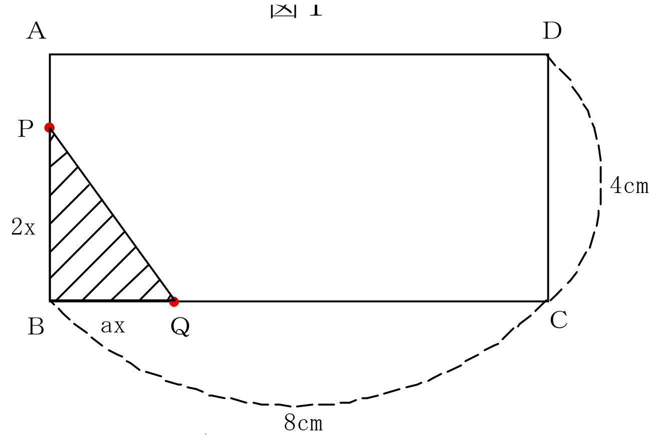


（2）　右図 青色の線



5．（1） 点Ｐは毎秒２cm の速さで進むからx 秒では$2x$ cm 進む。
また，点Ｑの進む速さを毎秒 a cm とすると，x 秒では$a\times x=ax$ cm 進む。

図１



① $BP = 2x \qquad BQ = ax$

$$y = \frac{1}{2}\times 2x\times ax = ax^2$$

答　$y = ax^2$

② ①より $y = ax^2$ ，図２より $x = 2$ のとき $y = 6$ であるから，点Ｑの速さa は

$$6 = a\times 2^2$$

$$a = \frac{6}{2^2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

答　毎秒$\frac{3}{2}cm$

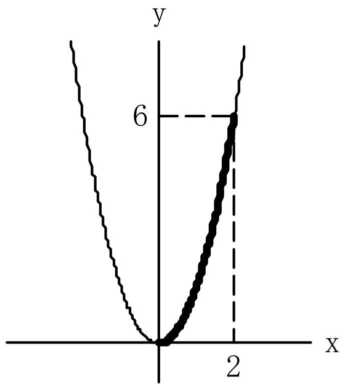
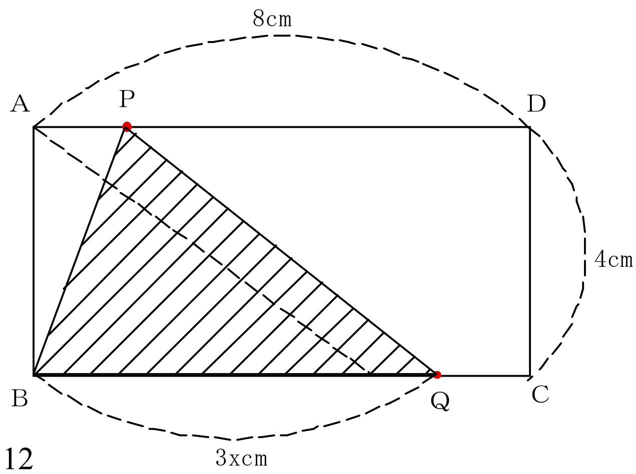


図２

（2） 点Ｐは毎秒２cmの速さで進むからx 秒では$2x$ cm 進む。

点Ｑは毎秒３cmの速さで進むからx 秒では$3x$ cm 進む。



２秒後（x＝２）を考えると，

$$BP = BA = 4$$

$$BQ = 3\times 2 = 6$$

$$y = \frac{1}{2}\times BP\times BQ = \frac{1}{2}\times 4\times 6 = 12$$

となり，y の値はまだ１５に達しない。y の値が１５になるのは$x > 2$ で，点Ｐが辺ＡＤ上にあるときである。

$$BQ = 3x$$

$$y = \frac{1}{2}\times BQ\times 4 = 2\times BQ = 2\times 3x = 6x = 15$$

$6x = 15 \qquad x = \frac{15}{6} = \frac{5}{2}$　　　答　$\frac{5}{2}$ 秒

（3）

①　点Ｐの速さは毎秒２cmで，点Ｐが点Ｄに到着するまでに動く距離は
$BA + AD = 4 + 8 = 12$ cmだから，

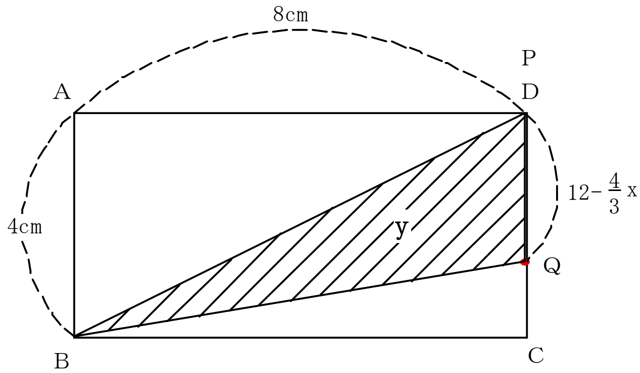
点Ｐは点Ｄに到着するまでに $\dfrac{12}{2} = 6$ 秒かかる。

点Ｑは６秒で点Ｃに到着する速さで動くので，この速さをbとすると，

$6b = BC = 8$

$b = \dfrac{8}{6} = \dfrac{4}{3}$　　　答　毎秒 $\dfrac{4}{3}$ cm

②　点Ｑの速さは毎秒 $\dfrac{4}{3}$cm



点Ｑは x 秒で右図のＱの位置に達するとすると，

$BC + CQ = \dfrac{4}{3}x$

$BC + CD = 8 + 4 = 12$

$DQ = BC + CD - (BC + CQ) = 12 - \dfrac{4}{3}x$

$y = \dfrac{1}{2} \times DQ \times BC = \dfrac{1}{2} \times \left(12 - \dfrac{4}{3}x\right) \times 8$

$= 4\left(12 - \dfrac{4}{3}x\right)$

$= 48 - \dfrac{16}{3}x$　　　答　$y = -\dfrac{16}{3}x + 48$

６．　（１）　$AB^2 = BC^2 + AC^2 = 8^2 + 6^2 = 64 + 36 = 100$

$AB = \sqrt{100} = 10cm$

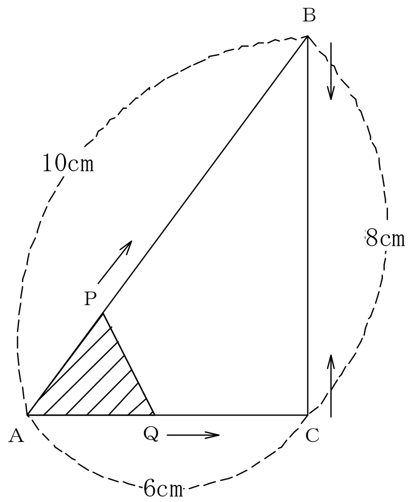
点Ｐ, Ｑの動く速さはどちらも同じで,
毎秒１cm 。また,

$AB + BC + AC = 10 + 8 + 6 = 24cm$

だから,

点Ｐ, Ｑはそれぞれが $\frac{24}{2} = 12cm$ 動いたとき，すなわち１２秒後に出会う。

答　１２秒後

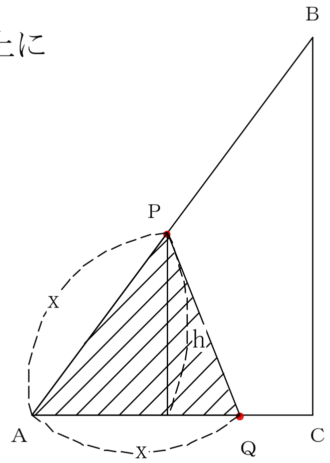


（２）　①　点Ｑが辺ＡＣ上にあるとき，点Ｐは辺ＡＢ上にある。

$\frac{AB}{BC} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4} = \frac{x}{h}$　　　$h = \frac{4}{5}x$

$y = \frac{1}{2} \times x \times h = \frac{1}{2} \times x \times \frac{4}{5}x = \frac{2}{5}x^2$

答　$y = \frac{2}{5}x^2$　（$0 \leqq x \leqq 6$）



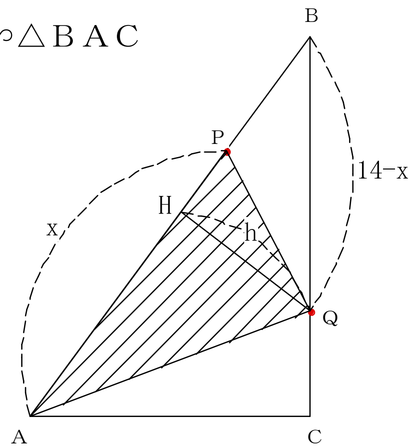
②　点Ｑから辺ＡＢに垂線を引くと，△ＢＱＨ∽△ＢＡＣ

$\frac{14-x}{h} = \frac{10}{6}$　　　$h = \frac{3}{5}(14-x)$

$y = \frac{1}{2} \times x \times h = \frac{1}{2} \times x \times \frac{3}{5}(14-x)$

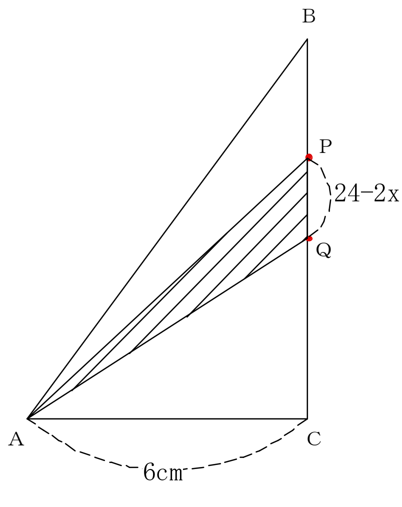
$= \frac{3}{10}x(14-x)$

答　$y = \frac{3}{10}x(14-x)$　（$6 \leqq x \leqq 10$）

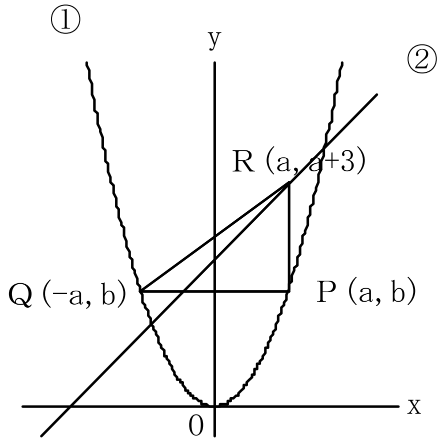


③　$y = \frac{1}{2} \times 6 \times (24-2x) = 6(12-x)$

答　$y = 6(12-x)$　（$10 \leqq x \leqq 12$）



７．（１）　点Pは$y = ax^2$ 上の点だから，



$P(a,b) = P(a,a^2) \quad a > 0$

よって，点P，Q，Rの座標はそれぞれ

$P(a,a^2), Q(-a,a^2), (R(a,a+3)$

△ＰＱＲの各辺の長さは

$PQ = a-(-a) = 2a$

$PR = a+3-b = a+3-a^2$

また，△ＰＱＲは直角二等辺三角形だから$PQ = PR$　よって，

$2a = a+3-a^2$

$a^2 + a - 3 = 0$

$a = \dfrac{-1\pm\sqrt{13}}{2}$　　$a > 0$　だから　答　$a = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{2}$

（２）　（１）より　$PQ = PR = 2a = 2\times\dfrac{-1+\sqrt{13}}{2} = -1+\sqrt{13}$　だから

△ＰＱＲ$= \dfrac{1}{2}\times PQ\times PR = \dfrac{1}{2}(\sqrt{13}-1)^2 = \dfrac{1}{2}(14-2\sqrt{13}) = 7-\sqrt{13}$

答　$7-\sqrt{13}$　(cm^2)

以上