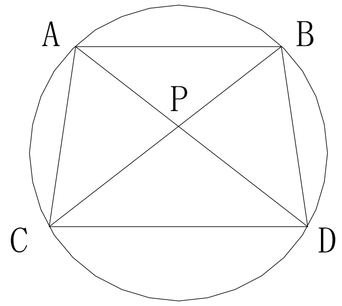
３．図形に強くなろう！

数学に強くなろう(目次)へ

問題11.12,13,14 へ

図1



１１．(1)　△ACDと△BDCにおいて

共通な辺だから，CD＝DC　・・・①

AB//CD だから　∠ADC＝∠BAD　・・・②

$\overset{\frown}{\mathrm{DB}}$ に対する円周角は等しいから

∠BAD＝∠BCD　・・・③

②，③ から　∠ADC＝∠BCD　・・・④

$\overset{\frown}{\mathrm{CD}}$ に対する円周角は等しいから

∠CAD＝∠DBC　・・・⑤

三角形の内角の和は180°であることと，

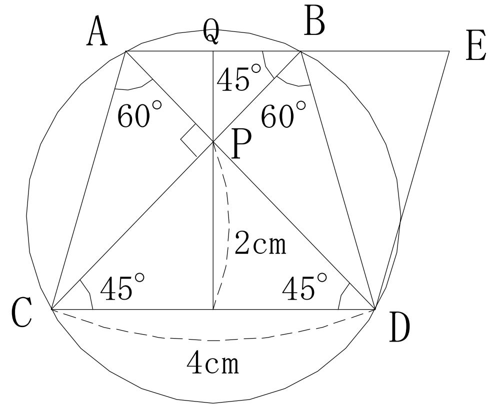
④，⑤ から　∠ACD＝∠BDC　・・・⑥

①，④，⑥ から，1辺とその両端の角がそれぞれ等しいので

△ACD≡△BDC

(2)　ア　∠EBD＝180-(45+60)＝75°

図２



イ　$\dfrac{CP}{PA}=\dfrac{CP}{PB}=\dfrac{CD}{AB}=\dfrac{4}{AB}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$

$AB=\dfrac{4}{\sqrt{3}}=\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$

$BE=4-\dfrac{4\sqrt{3}}{3}=\dfrac{4\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}$

$\dfrac{2}{PQ}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$　　$PQ=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

△BDEの高さ＝　$2+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}=\dfrac{2\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}$

$$\Delta BDE=\frac{1}{2}\times\frac{4\times\left(3-\sqrt{3}\right)}{3}\times\frac{2\times\left(3+\sqrt{3}\right)}{3}=\frac{4(9-3)}{9}=\frac{8}{3}cm^2$$

１２．(1) ア　△FAB

イ　△AEC と △FAB において

$\overset{\frown}{AF}$ に対する円周角は等しいから

∠ECA＝∠ABF・・・・・・・・①

また，BC // EA だから

∠CEA＝∠BCF・・・・・・・・②

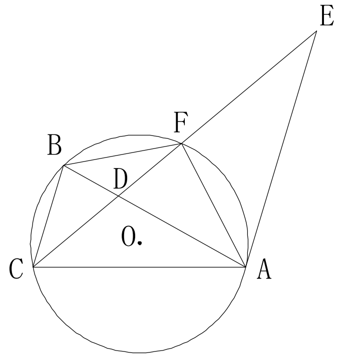
$\overset{\frown}{BF}$ に対する円周角は等しいから

∠BCF＝∠BAF・・・・・・・・③

②，③より，∠CEA＝∠BAF・・・・④

①，④より，2組の角がそれぞれ等しいから

△AEC ∽ △FAB



(2) AB＝AC＝6cm,　CF＝5cm,　∠ACD＝∠BCD

ア　等しい角度と線分の長さは右図のようになる。

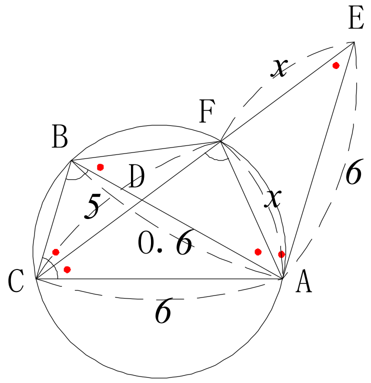
△AEC ∽ △FAB より

$$\frac{5+x}{6} = \frac{6}{x}$$

これより，$x^2 + 5x - 36 = 0$

$$(x-4)(x+9) = 0$$

$x > 0$　より　$x = AF = 4cm$

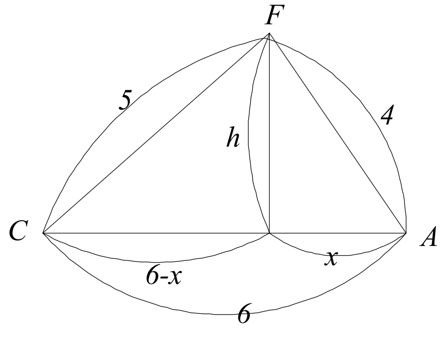


イ　$h^2 = 5^2 - (6-x)^2 = 4^2 - x^2$

$$25 - 36 + 12x - x^2 = 16 - x^2$$

$$12x = 27$$

$$x = \frac{27}{12} = \frac{9}{4}$$

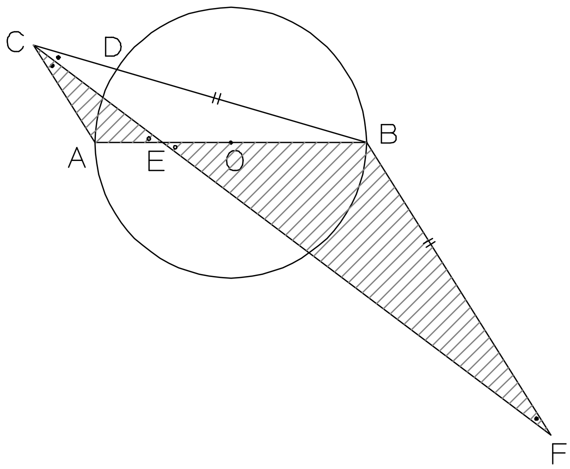


$$h = \sqrt{4^2 - x^2} = \sqrt{4^2 - \left(\frac{9}{4}\right)^2} = \sqrt{16 - \frac{81}{16}} = \sqrt{\frac{175}{16}} = \frac{5\sqrt{7}}{4}$$

$$\Delta AFC = \frac{1}{2} \times 6 \times h = 3 \times \frac{5\sqrt{7}}{4} = \frac{15\sqrt{7}}{4} cm^2$$

１３．

（１）



△ＡＥＣと△ＢＥＦで、

対頂角は等しいから、

∠ＡＥＣ＝∠ＢＥＦ　・・・①

仮定から

∠ＡＣＥ＝∠ＢＣＥ　・・・②

△ＢＣＦは二等辺三角形だから、

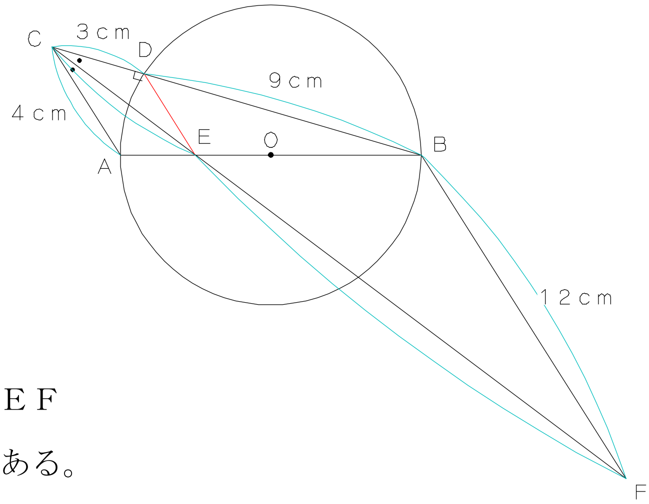
∠ＢＦＥ＝∠ＢＣＥ　・・・③

②，③から

∠ＡＣＥ＝∠ＢＦＥ　・・・④

①，④から、２組の角がそれぞれ等しいので、△ＡＥＣ∽△ＢＥＦ

（２）　ア



△ＢＣＦで、

ＣＤ：ＤＢ＝３：９

＝１：３・・・①

△ＡＥＣ∽△ＢＥＦから

ＣＥ：ＥＦ＝ＡＣ：ＢＦ

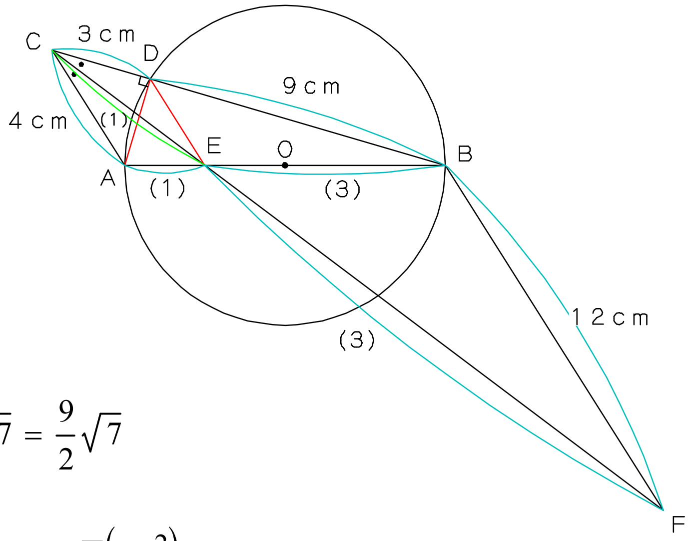
＝４：１２

＝１：３・・・②

①，②から、ＣＤ：ＤＢ＝ＣＥ：ＥＦ

したがって、ＤＥとＢＦは平行である。

イ



$$AD = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{7}$$

$$\Delta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD$$

$$= \frac{1}{2} \times 12 \times \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$$

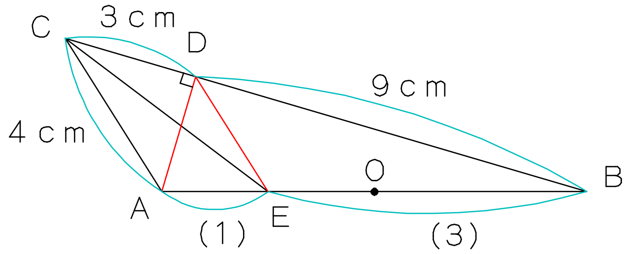
$$\Delta BCE = \frac{3}{1+3}\Delta ABC = \frac{3}{4} \times 6 \times \sqrt{7} = \frac{9}{2}\sqrt{7}$$

$$\Delta BCF = \frac{1+3}{1}\Delta BCE = 4 \times \frac{9}{2}\sqrt{7} = 18\sqrt{7}\left(cm^2\right)$$

イ の補足説明

右図で

△ＡＣＤは直角三角形だから
三平方の定理より



$$AD^2 + 3^2 = 4^2$$

$$AD^2 = 4^2 - 3^2 = 16 - 9 = 7$$

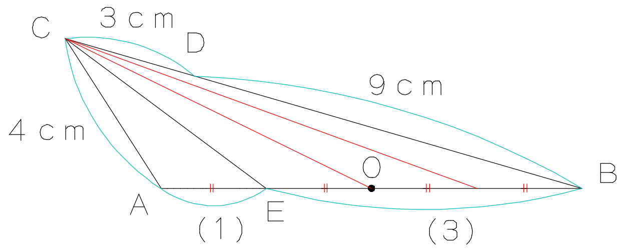
$$AD = \sqrt{7}$$

$$\varDelta ABC = \frac{1}{2} \times BC \times AD = \frac{1}{2} \times (3+9) \times \sqrt{7} = 6\sqrt{7}$$

AE：EB＝AC：BF＝3：9＝1：3

三角形の面積：底辺の長さと高さが等しい三角形の面積は等しいことから、

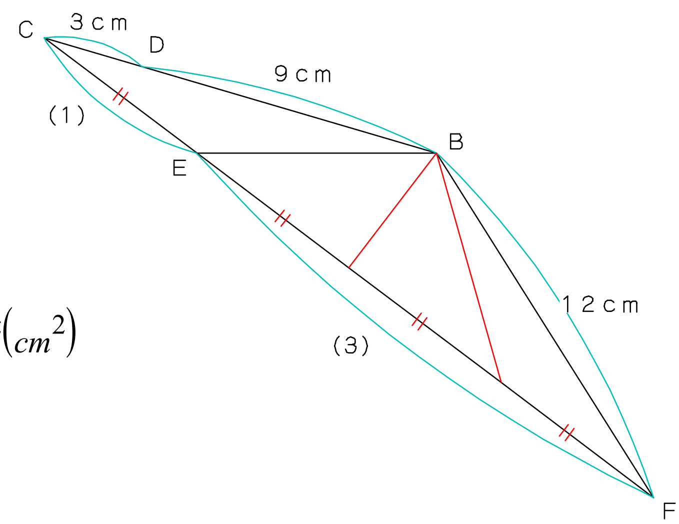
右図で、線分ＥＢを３等分した点と頂点Ｃを結んでできる３つの三角形の面積は全て△ＡＣＥの面積に等しい。従って、



$$\varDelta BCE = \frac{3}{4} \times \varDelta ABC$$

$$= \frac{3}{4} \times 6\sqrt{7} = \frac{9}{2}\sqrt{7}$$

右図で、線分ＥＦを３等分してできる３つの三角形の面積は全て△ＢＣＥの面積に等しい。従って、

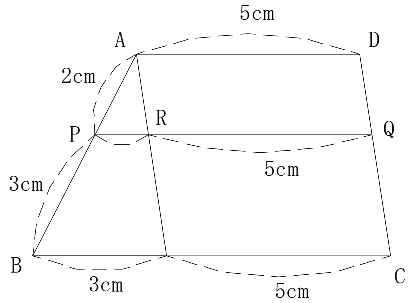


$$\varDelta BCF = 4 \times \varDelta BCE$$

$$= 4 \times \frac{9}{2}\sqrt{7} = 18\sqrt{7}\left(cm^2\right)$$

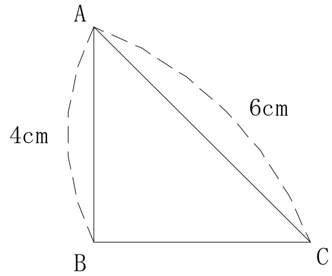
１４．（１）$\frac{PR}{3} = \frac{2}{2+3}$ より $PR = \frac{6}{5}$

よって，$PQ = 5 + \frac{6}{5} = \frac{31}{5}cm$

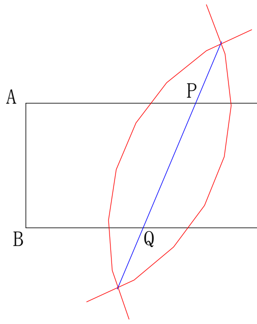


（２）$BC = \sqrt{6^2 - 4^2} = \sqrt{36 - 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}cm$

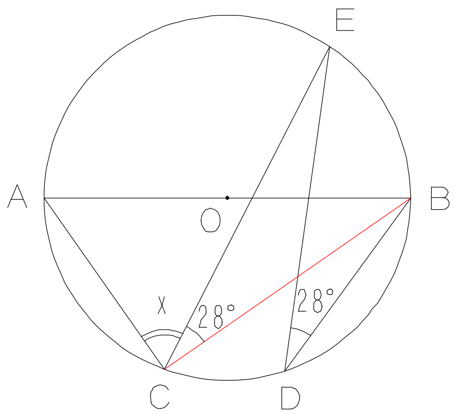
体積 $V = \frac{1}{3} \times \pi \times (2\sqrt{5})^2 \times 4 = \frac{80\pi}{3}cm^3$



（３）線分ACの垂直ニ等分線とAD，BCの交点をP，Q とすれば，線分PQは求める線分である。



（４）$x = 90 - 28 = 62°$



以上